COMPTES RENDUS
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 5 DÉCEMBRE 1898,
PRÉSIDENCE DE M. WOLF.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Aperçu sur la théorie de la bicyclette : équilibre du cavalier;* par M. J. Boussinesq.

« I. Sur route unie, à une allure réglée, la vitesse V s'écarte peu d'une moyenne V_m, et [1] les deux petits produits $V\alpha$, $V^2\alpha$ ne diffèrent pas sensiblement de $V_m\alpha$, $V_m^2\alpha$. L'équation (7), résolue par rapport à la dérivée seconde de θ, prend donc, en y effaçant d'ailleurs l'indice (désormais inutile) de V_m, la forme linéaire

$$(8)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b'V}{ah'}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{g}{h'}\left(\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta\right).$$

» L'art du cavalier consiste à régler, à chaque instant, grâce au guidon,

---

(1) Voir le précédent *Compte rendu*, p. 843.

la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$, de manière à maintenir très petite l'inclinaison θ. Celle-ci ne peut grandir, ou plutôt s'écarter de sa valeur normale $\frac{V^2}{gR} = \frac{V^2}{ga}\alpha$ donnée par (5) ou (8) sur une voie d'un rayon R de courbure assigné, que si sa dérivée première en t, rendue, par une circonstance accidentelle quelconque, un peu sensible, et égale à une petite quantité donnée ε au moment où débute la perturbation qui en résulte, conserve une valeur appréciable pendant un certain temps. La circonstance en question peut être, par exemple, la rencontre d'un caillou sur la route, ou un coup de vent soufflant de côté, ou un mouvement spontané du bicycliste, etc. Le cavalier devra donc alors faire acquérir, à la dérivée seconde de θ, des valeurs de signe contraire au signe même de ε, et capables d'annuler rapidement la dérivée première de θ. Il le pourra, puisqu'il dispose *immédiatement*, dans (8), de la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$, que j'appellerai ω, du guidon.

» On voit qu'il devra donner à cette vitesse angulaire le signe de ε, c'est-à-dire *incliner le guidon vers le côté où il se sent jeté*; et, aussi, que les variations *naissantes* de α et de θ viendront, les premières, concourir à son action, les secondes, la contrarier. L'effet utile des premières l'emportera sur l'effet nuisible des secondes, si la vitesse ω de rotation du guidon excède la fraction $\frac{ga}{V^2}$ de la vitesse initiale ε d'inclinaison, fraction d'autant plus faible que l'allure est plus rapide. En effet, dans le second membre de (8), le binome $\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta$, nul à l'instant initial $t = 0$ de la perturbation, deviendra positif, son premier terme grandissant plus vite que le produit εt, alors que θ croît, au contraire, moins que εt.

» II. Supposons, pour simplifier, ε assez petit, ou ω assez grand, pour que la dérivée première de θ s'annule avant que θ ait eu le temps de varier d'une manière notable.

» Alors le dernier terme, binome, de (8), d'abord nul, aura valu sensiblement $-\frac{V^2}{ak'}\int_0^t \omega\, dt$. Et l'équation (8) multipliée par dt, puis intégrée durant tout le petit temps τ nécessaire pour annuler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ d'inclinaison, qui était d'abord ε, donnera

$$(9) \qquad \varepsilon = \frac{b'V}{ak'}\int_0^\tau \omega\, dt + \frac{V^2}{ak'}\int_0^\tau dt \int_0^t \omega\, dt.$$

» Désignons par ζ l'angle total $\int_0^\tau \omega\, dt$ dont le guidon aura tourné. La vitesse angulaire moyenne du guidon aura donc été $\frac{\zeta}{\tau}$; et l'on obtiendra une valeur approchée du dernier terme de (9) en y remplaçant ω par cette moyenne. La formule (9) dévient alors la relation approchée, entre ε, ζ et τ,

$$\varepsilon = \frac{V}{a}\left(\frac{b'}{h'} + \frac{V\tau}{2h'}\right)\zeta. \tag{10}$$

» La rotation ζ du guidon est d'autant moindre qu'elle a eu un temps τ plus long pour s'effectuer et produire son effet d'annulation sur la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de renversement. Sa valeur correspondant à l'hypothèse ($\tau = 0$) d'une action instantanée serait $\frac{ah'}{b'V}\varepsilon$; de sorte que l'on aura

$$\zeta < \frac{ah'}{b'V}\varepsilon. \tag{11}$$

» Une fois la vitesse de renversement annihilée, et toujours dans l'hypothèse qu'elle l'ait été avant que la variation totale de θ (comparable à $\frac{1}{2}\varepsilon\tau$) soit devenue sensible, le cavalier, s'il veut éviter d'avoir à neutraliser ensuite une perturbation de sens contraire, pourra cesser d'influer sur θ et annihiler cependant, à son tour, le petit écart total ζ éprouvé par l'angle α des traces des deux roues sur le sol, afin de retrouver le rayon primitif R de courbure de sa trajectoire, qui lui est imposé par la configuration du chemin à suivre. Il devra, pour cela, faire vérifier désormais par α l'équation (8) débarrassée de son premier terme, c'est-à-dire, s'il compte alors les temps à partir du moment où θ a eu sa dérivée annulée, adopter pour la partie variable $\Delta\alpha$, devenue ζ, de l'angle α, la formule $\zeta e^{-\frac{Vt}{b'}}$, qui la rend insensible après un parcours Vt de trois ou quatre longueurs b'.

» III. Le changement d'orientation de la bicyclette sur la route, causé par la perturbation, aura été insignifiant pendant que s'effectuait la première rotation ζ du guidon par rapport au cadre, puisque l'instant τ de sa durée est supposé négligeable. Pendant que le guidon revient ensuite à sa première position relative, ce changement d'orientation sur le sol (ou par rapport à l'axe de la route) égale évidemment, par unité du chemin parcouru $\int ds$ ou $\int V\, dt$, le changement même $\frac{\Delta\alpha}{a}$ de la courbure; et il est en tout, très sensiblement,

$$\int_0^\infty \frac{\Delta\alpha}{a} \mathrm{V}\, dt = \frac{\mathrm{V}\zeta}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{\mathrm{V}t}{b'}} dt = \frac{b'\zeta}{a}, \tag{12}$$

quantité inférieure, d'après (11), à la limite très petite $\frac{h'}{\mathrm{V}}\varepsilon$. Elle serait encore moindre, si le cavalier se penchait en avant pendant le premier temps, τ, de la manœuvre, pour y rendre b' le plus grand possible et, d'après (10), réduire ζ; puis, s'il se redressait et se portait, au contraire, un peu en arrière durant la seconde phase, afin de diminuer alors b' et aussi, dans (12), le rapport de b' à a (¹).

» D'ailleurs, les déviations absolues qu'aura éprouvées en même temps la bicyclette sur le sol, par rapport à sa trajectoire directe ou non troublée, sont évidemment insignifiantes.

» En résumé, les petits chocs transversaux tendant au renversement de la machine pourront, *à une allure* V *suffisamment rapide*, être corrigés sans dérangement appréciable, grâce à la manœuvre du guidon, qui finira par devenir instinctive chez le cavalier.

» Au reste, comme l'a expliqué judicieusement M. Bourlet dans son *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes* (*équilibre et direction*) (Paris, Gauthier-Villars, p. 95 et 89), des dispositions, concernant la direction et la place de l'axe autour duquel tourne le plan de la roue directrice, sont prises, dans les machines actuelles : 1° pour que cette roue s'incline, par l'effet tant de son poids que de la pression du sol sur elle, du côté où la bicyclette viendrait à pencher, de manière à remédier automatiquement, en marche rectiligne, à cette inclinaison ; et aussi, 2° pour que, une fois la situation verticale du cadre rétablie, le frottement du sol sur la roue directrice, en tirant vers l'arrière le bas de cette roue, la ramène dans le plan du cadre.

» IV. Des perturbations que l'on aurait négligé de neutraliser au début, et où l'inclinaison θ serait devenue sensible, donneraient lieu à des formules plus compliquées, parce que les quatre termes de l'équation (8) y interviendraient à la fois par des valeurs notablement variables. Je ne m'occuperai pas en détail de ce cas. J'observerai seulement que θ pourra y deve-

(¹) Toutefois, ces changements d'attitude devraient peut-être se faire trop vite pour ne pas mettre en défaut nos formules, dont la démonstration suppose que le cavalier se comporte comme un corps rigide fixé au cadre.

nir telle petite fonction de t qu'on voudra, à partir des valeurs initiales, supposées données, tant de cette fonction que de sa dérivée première; car il suffira que le cavalier choisisse pour α l'intégrale même de l'équation différentielle du premier ordre en α que devient l'équation (8), quand on y substitue à θ la fonction arbitraire voulue. Les valeurs de α devront, toutefois, ne pas excéder les angles possibles que comporte la bicyclette. Et la trajectoire devra aussi s'orienter vers la direction où l'on veut aller; sans quoi le cavalier n'aurait qu'à s'arrêter, pour repartir dans le sens voulu.

» Il évitera, autant que possible, cet inconvénient, si, en faisant acquérir, ou tout de suite, ou après passage par zéro, un signe convenable à la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, il amène assez vite l'inclinaison θ à sa valeur *de régime* $\frac{V^2}{gR}$, et si, au moment d'y réussir, il amortit durant un court instant τ la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, par une manœuvre rapide du guidon. Alors, il est vrai, l'angle α des traces des deux roues présentera généralement un certain écart $\Delta\alpha = \zeta$ d'avec sa valeur normale ou de régime $\frac{a}{R}$. Mais le cavalier pourra faire évanouir graduellement cet écart de la manière qui supprime son influence sur θ, ou qui annule, dans (8), la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Il tâchera donc de donner désormais à la partie variable $\Delta\alpha$ de α la valeur $\zeta e^{-\frac{Vt}{b'}}$, qui l'annihile au bout d'un parcours insignifiant, comme on a vu. Après quoi, θ et α auront ainsi repris leurs valeurs normales. »

PHYSIQUE. — *Sur la dispersion anomale et le pouvoir rotatoire magnétique de certaines vapeurs incandescentes.* Note de M. HENRI BECQUEREL.

« Dans une des dernières séances ([1]), après avoir répété une expérience remarquable faite par MM. Macaluso et Corbino, j'ai montré que le pouvoir rotatoire extraordinairement grand, reconnu par les auteurs italiens, dans la vapeur de sodium, pour les radiations dont les longueurs d'onde avoisinent immédiatement celles des bandes d'absorption, devait être

---

([1]) *Comptes rendus*, t. CXXVII, p. 647; 31 octobre 1898.