0

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ.

(5) 5

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1899.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

EM

Aperçu sur la théorie de la bicyclette;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

---

§ I. — Principales données approchées du problème mécanique de la bicyclette.

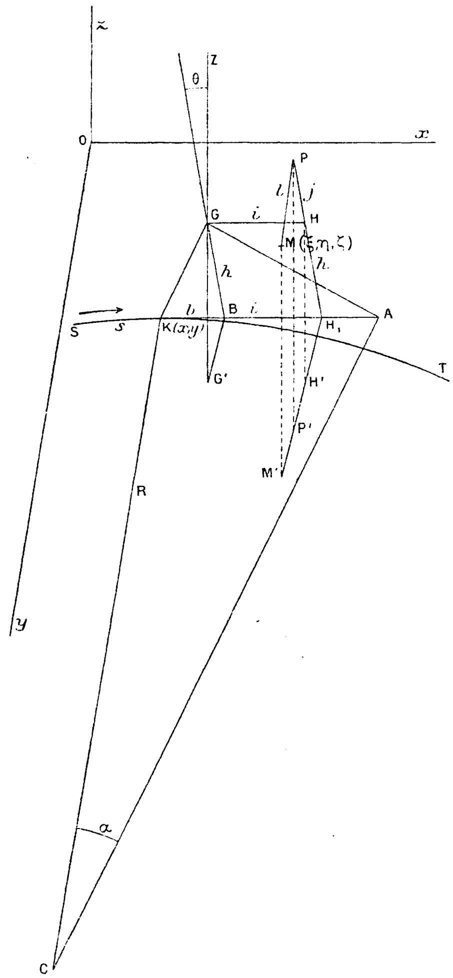
1. Dans la bicyclette, le point le plus bas K de la roue *motrice* (ou roue de derrière) a pour lieu de ses positions successives sur le sol, que nous supposerons horizontal ([1]), une courbe SKT, tangente au plan médian KGA de cette roue. Cette courbe, en y joignant la vitesse V avec laquelle elle est décrite, définit ce qu'on peut appeler le mouvement de *progression* de la bicyclette sur le sol.

Le point le plus bas A de la roue *directrice* (ou roue de devant) est d'ailleurs, à des écarts près négligeables, contenu dans le même plan et situé à une distance sensiblement invariable $KA = a$ du bas K de la roue motrice. De plus, le poids mg de tout le système, constitué en majeure partie par le cavalier, peut être censé se trouver encore dans le même plan médian, en G, un peu au-dessus du milieu de la selle, à une distance sensiblement constante $GB = h$ de la base KA de la bicyclette, et à une petite distance horizontale, également donnée, $KB = b$, en avant du point inférieur K de la roue motrice. Quant à la masse m du système, elle se trouve distribuée, tout autour de ce centre de gra-

---

([1]) *Voir* la figure à la page suivante.

vité G, à peu près symétriquement de part et d'autre du plan KGA, dont ses éléments dm, en M par exemple, sont distants de quantités $MP = l$, autant positives (d'un côté) que négatives (de l'autre), les



pieds P de ces perpendiculaires l sur KGA étant aussi à des distances $PH = j$, autant positives que négatives, de l'horizontale GH du plan et, suivant celle-ci, à des distances $GH = i$, encore positives autant que négatives, en avant de G. Cette masse m, réductible sensiblement au corps du cavalier, au cadre de la machine et au moyeu des roues, sera de forme à peu près invariable; en sorte que les trois coordonnées i, j, l, définissant la situation de ses éléments dm par rapport au triangle KGA, pourront être regardées comme indépendantes du temps t.

Cette supposition n'est évidemment qu'approximative, surtout en ce qui concerne les jambes du cavalier, dont le mouvement par rapport au cadre produit celui des pédales, et l'accompagne avec une vitesse très comparable à la vitesse de rotation des roues même à leur circonférence (environ le $\frac{1}{4}$ ou le $\frac{1}{5}$ de celle-ci pour les pieds, dans une machine ordinaire). Comme on aurait, sans doute, beaucoup de peine à tenir compte de ces mouvements propres des jambes du cavalier, et qu'il faut, dès lors, se borner à une approximation restreinte, il serait peu utile, sinon illusoire, quand on les néglige, de mettre en ligne de compte les inerties rotatives, plus faciles à évaluer, des deux roues, inerties tout au plus aussi influentes que celles des jambes; car la masse de celles-ci excède la masse de la jante et du pneu des roues dans un rapport paraissant devoir être pour le moins aussi grand que le sont les accélérations propres de ces derniers organes comparativement à celles des pieds et même des jambes.

Si l'on calculait, dans l'équation des moments (que nous aurons à employer), les petits termes correspondant à ces diverses inerties, il faudrait aussi, sans doute : 1° tenir compte des défauts de symétrie qu'offrent, de part et d'autre du plan médian du cadre, le bas du corps du cavalier et les deux pédales, toujours à 180° l'une de l'autre; les organes de transmission placés sur un seul côté (pignons et chaîne); enfin, même le guidon et la roue directrice, quand celle-ci est inclinée sur le plan médian; 2° ne plus regarder comme constante, ni en longueur, ni en direction par rapport au plan médian du cadre, la droite KA de jonction des points les plus bas des deux roues.

Un degré d'approximation supérieur à celui que pourra donner le présent aperçu exigerait donc, dans les formules, une complication beaucoup plus grande; et il y a lieu de s'en tenir à cet aperçu, au moins dans une première étude.

Enfin, et pour achever de définir les éléments de la question, l'angle θ de BG avec une verticale, comme G'Z, compté positivement ou négativement suivant que la projection BG′ de BG sur le sol est, ou non, dirigée vers la concavité de la courbe ST, mesure l'*inclinaison* prise par la bicyclette, inclinaison qu'il faut, pour la stabilité, maintenir sans cesse entre d'assez étroites limites de part et d'autre de zéro.

2. Nous choisirons, d'une part, sur le sol, un axe Ox presque parallèle à l'arc croissant $SK = s$, décrit aux environs de l'époque t, et un axe normal Oy dirigé, de même, presque suivant les sens des rayons de courbure correspondants de ST, comme $KC = R$, d'autre part, un axe Oz vertical, s'élevant au-dessus du sol. Les coordonnées x, y du point K seront fonctions du temps t par l'intermédiaire de l'arc s, relativement auquel leurs dérivées successives s'écriront x' et y', x'' et y'', x''' et y''', ... Quant à la dérivée première de s en t, ce sera la vitesse même V du mouvement progressif de la bicyclette; de sorte que x, y, x', y', etc. se différentieront en t par la formule symbolique

$$\frac{d}{dt} = V\frac{d}{ds}. \tag{1}$$

Dans le plan des xy, les cosinus directeurs de la tangente KBA seront x', y', le premier, peu différent de 1, le second, très petit; et ceux des perpendiculaires BG′, $H_1H'P'M'$ suivant lesquelles se projettent sur le sol les lignes BG, H_1HPM, cosinus dont le second est presque 1 (quand ces projections sont positives), égaleront, par suite, $-y'$, x'. Dès lors, les coordonnées du point H_1, situé sur KA à la distance $b+i$ de K, seront

$$x+(b+i)x', \quad y+(b+i)y';$$

et, vu les valeurs $(h+j)\sin\theta$, $l\cos\theta$ des projections H_1P' et $P'M'$ de H_1H+j et de l, les coordonnées du point M′, projection de M sur le sol, excéderont les précédentes, respectivement, de

$$-y'[(h+j)\sin\theta+l\cos\theta], \qquad x'[(h+j)\sin\theta+l\cos\theta].$$

On aura donc pour les trois coordonnées variables, que j'appellerai ξ, η, ζ, du point M, évidemment situé à la hauteur

$$(h+j)\cos\theta - l\sin\theta$$

au-dessus du sol, les valeurs

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = x + (b+i)x' - y'[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta], \\ \eta = y + (b+i)y' + x'[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta], \\ \zeta = (h+j)\cos\theta - l\sin\theta. \end{cases}$$

§ II. — Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison.

3. Cela posé, afin d'éliminer les réactions extérieures, exercées surtout aux deux points principaux K et A de contact de la bicyclette avec le sol à l'époque t, appliquons, à cet instant, le principe des moments à tout le système, par rapport à la droite KA du sol; et imaginons l'axe des x choisi exactement parallèle à cette tangente particulière KA de la courbe ST. Les deux composantes non parallèles à KA, $-\frac{d^2\eta}{dt^2}dm$, $-\frac{d^2\zeta}{dt^2}dm$, de l'inertie de l'élément de masse, dm, situé en M, auront comme bras de levier (tendant à accroître l'angle θ), M'M, $-$ H$_1$M', ou ζ, $-(\eta - y)$; et le poids mg, concentré en G, aura, de même, le bras de levier BG', ou $h\sin\theta$. La somme des moments étant nulle, il vient donc, après division par mh,

$$(3)\qquad g\sin\theta + \int\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{\eta - y}{h} - \frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{\zeta}{h}\right)\frac{dm}{m} = 0.$$

Il reste à différentier deux fois en t les valeurs (2) de ζ, η, et à faire $x' = 1, y' = 0$ dans les résultats, pour substituer ceux-ci dans (3), ainsi que les valeurs (2) de η et ζ simplifiées de même. On trouve d'abord, sans difficulté,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] - \dfrac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta], \\ \dfrac{\eta - y}{h} = \dfrac{b+i}{h}y' + x'\left(\dfrac{h+j}{h}\sin\theta + \dfrac{l}{h}\cos\theta\right) = \dfrac{h+j}{h}\sin\theta + \dfrac{l}{h}\cos\theta. \end{cases}$$

Passant ensuite à la différentiation de η, appliquons-y à x, y, ou à leurs dérivées en s, la règle symbolique (1). Nous aurons, comme dérivée première,

$$V y' + (b+i) V y'' + V x'' [(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] + x' \frac{d\theta}{dt}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta],$$

et, comme dérivée seconde,

$$\frac{dV}{dt}y' + V^2 y'' + (b+i)\left(\frac{dV}{dt}y'' + V^2 y'''\right) + \left(\frac{dV}{dt}x'' + V^2 x'''\right)[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta] + 2Vx''\frac{d\theta}{dt}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta] + x'\frac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta] - x'\frac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta].$$

Celle-ci se simplifie beaucoup, à raison des formules données par deux différentiations en s de l'identité $x'^2 + y'^2 = 1$, qui définit la variable s, et par une différentiation en t de l'expression connue $x''^2 + y''^2$ du carré $\frac{1}{R^2}$ de la courbure. Ces formules,

$$x'x'' + y'y'' = 0,$$

$$x'x''' + y'y''' + x''^2 + y''^2 = 0,$$

$$V(x''x''' + y''y''') = \frac{1}{R}\frac{d\frac{1}{R}}{dt},$$

se réduisent, attendu que $x' = 1$ et $y' = 0$ en K, à

$$x'' = 0, \qquad x''' = -y''^2, \qquad Vy''y''' = \frac{1}{R}\frac{d\frac{1}{R}}{dt};$$

d'où il résulte, ainsi que de l'expression ci-dessus du carré de la courbure, vu d'ailleurs le signe évidemment positif de y'' (car y' croît de S à T, d'après le choix fait de l'axe des y),

$$y'' = \frac{1}{R}, \qquad Vy''' = \frac{d\frac{1}{R}}{dt}.$$

Donc la valeur, changée de signe, de la dérivée seconde de η, à substituer dans (3), sera simplement

$$(5)\quad \begin{cases} -\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\dfrac{V^2}{R}\left(1 - \dfrac{h+j}{R}\sin\theta - \dfrac{l}{R}\cos\theta\right) - (b+i)\dfrac{d\dfrac{V}{R}}{dt} \\ \qquad -\dfrac{d^2\theta}{dt^2}[(h+j)\cos\theta - l\sin\theta] + \dfrac{d\theta^2}{dt^2}[(h+j)\sin\theta + l\cos\theta]; \end{cases}$$

et, d'autre part, celle de $\dfrac{\zeta}{h}$ qui la multiplie dans (3) est, d'après (2),

$$(6)\qquad \frac{\zeta}{h} = \frac{h+j}{h}\cos\theta - \frac{l}{h}\sin\theta.$$

Grâce à (4), (5) et (6), l'équation (3) devient explicite en V, R, θ ou leurs dérivées. En outre, de nombreux termes de son développement disparaissent, par suite de ce que, les coordonnées relatives i, j, l se trouvant comptées à partir du centre de gravité G du système et le plan KGA des ij étant un plan de symétrie de la masse $\int dm$, on a les cinq égalités

$$\int (i, j, l)\, dm = 0, \qquad \int (i, j)\, l\, dm = 0.$$

Aussi l'équation (3) des moments, où nous poserons, pour abréger,

$$(7)\qquad h' = h + \frac{1}{h}\int (j^2 + l^2)\frac{dm}{m}, \qquad b' = b + \frac{1}{h}\int ij\frac{dm}{m},$$

prend-elle la forme, très réduite,

$$(8)\quad \begin{cases} g\sin\theta - \dfrac{V^2}{R}\left[1 - \dfrac{h}{R}\left(1 + \displaystyle\int \dfrac{j^2 - l^2}{h^2}\dfrac{dm}{m}\right)\sin\theta\right]\cos\theta \\ \qquad\qquad - b'\dfrac{d\dfrac{V}{R}}{dt}\cos\theta - h'\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

4. Telle est la relation simple annoncée entre le mouvement progressif de la bicyclette, défini dans son état actuel par V quant à la vitesse, par R quant à la trajectoire, et son mouvement d'inclinaison, défini par l'angle θ du plan médian de la roue motrice avec la verticale. Cet angle devant rester très petit, on peut le substituer à son sinus et réduire $\cos\theta$ à l'unité. De plus, à raison tant de la petitesse de θ que de celle du rapport $\frac{h}{R}$, le second terme de (8) ne sera altéré que dans une proportion insignifiante, si l'on y réduit aussi à l'unité le facteur complexe entre crochets. Et la formule (8) sera simplement, après division par $-h'$ et transposition de deux termes,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{h'}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2}{h'R}. \tag{9}$$

On remarquera que, d'après (7), la constante h', plus grande que BG ou h, est la longueur du pendule composé constitué par le système matériel dans sa rotation autour de sa base KA, et que la constante b' diffère assez peu de la droite KB, ou b, exprimant de combien le centre G de gravité du système se trouve en avant du point le plus bas K de la roue motrice. En effet, l'intégrale $\int ij\frac{dm}{m}$, valeur moyenne du produit ij, ne peut être considérable, le système ayant, dans chacun de ses plans normaux à KA ou définis par une valeur de i, presque autant de points au-dessous du centre G, ou de H, et où j est négatif, que de points au-dessus, où j est positif. Toutefois, dans la position, assez fréquente, où le cavalier tient la tête en avant, il est visible que i et j ont même signe, positif dans le haut du corps, négatif dans le bas, en plus d'endroits qu'ils n'ont signe contraire : donc le dernier terme de (7) est alors positif. Or le terme b augmente, lui aussi, dans cette position où le cavalier se porte en avant; car ses pieds, fixés aux pédales de la machine, ne reculent pas pour cela, et le centre de gravité G ne peut qu'avancer.

Ainsi, le petit coefficient b' tout entier doit augmenter, dans un rapport sensible, quand le cavalier se penche en avant.

§ III. — Équilibre du cavalier.

5. Les dérivées premières, en t, des deux variables V, R caractéristiques du mouvement progressif, dépendent immédiatement de la volonté du cavalier et constituent, entre certaines limites, deux fonctions arbitraires du temps, laissées à sa disposition non seulement pour se diriger et avancer, mais aussi pour éviter toute exagération dangereuse de θ. En effet, l'accélération, $\frac{dV}{dt}$, du mouvement de rotation de la roue motrice à sa circonférence, est en rapport direct avec l'action des pieds du cavalier sur les pédales; et, d'autre part, le changement survenu, d'un instant à l'autre, dans le rayon R de courbure, traduit d'une manière tout aussi directe l'action de ses mains, qui règlent, grâce au guidon, le petit angle α fait, *sur le sol*, par le plan de la roue directrice, avec la trace KA du plan de la roue motrice. Car il faut remarquer que, l'extrémité A de la tangente KA à ST se mouvant tangentiellement à la trace du premier de ces plans, la normale AC à sa trajectoire va couper sous le même angle α la normale KC à la trajectoire de l'extrémité K. Or l'on reconnaît que l'intersection C de ces deux normales, centre instantané de rotation de KA, se confond avec le centre de la courbure, en K, de ST.

Effectivement, les coordonnées variables de A sont

$$x + ax', \qquad y + ay';$$

et leurs dérivées par rapport à s, entre elles comme les cosinus directeurs de la trajectoire du point A, sont

$$x' + ax'', \qquad y' + ay''.$$

Les deux normales KC, AC aux trajectoires ont, dès lors, comme équations respectives,

$$\left\{\begin{array}{c}(X - x)x' + (Y - y)y' = 0,\\ (X - x - ax')(x' + ax'') + (Y - y - ay')(y' + ay'') = 0,\end{array}\right.$$

X, Y désignant leurs coordonnées courantes et, en particulier, celles de leur point commun C. On peut remplacer la seconde de ces équations par le résultat de sa soustraction d'avec la première, et alors leur système devient, en tenant compte des identités précédemment utilisées entre x', y', x'' et y'',

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0, \qquad (X - x)x'' + (Y - y)y'' = 1,$$

c'est-à-dire les deux formules qui déterminent le centre C(X, Y) de la courbure, en K, de l'arc ST, intersection des deux normales à ST menées en (x, y) et en $(x + x'ds, y + y'ds)$.

Par suite, le triangle rectangle CKA donne

$$KA = a = R \operatorname{tang} \alpha,$$

ou, à raison de la petitesse de α,

$$a = R\alpha, \qquad R = \frac{a}{\alpha}.$$

Alors l'équation (9), où il est préférable de faire figurer, au lieu de R, l'angle α qui exprime d'une manière presque immédiate l'action des mains du cavalier, devient

$$(10) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{ah'}\frac{d.V\alpha}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2\alpha}{ah'}.$$

6. Sur route unie, à une allure réglée, V s'écarte peu d'une moyenne V_m, et les deux petits produits $V\alpha$, $V^2\alpha$ ne diffèrent pas sensiblement de $V_m\alpha$, $V_m^2\alpha$. L'équation (10), résolue par rapport à la dérivée seconde de θ, prend donc, en y effaçant d'ailleurs l'indice (désormais inutile) de V_m, la forme linéaire

$$(11) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{b'V}{ah'}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{g}{h'}\left(\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta\right).$$

L'art du cavalier consiste à régler à chaque instant, grâce au guidon, la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$, de manière à maintenir très petite l'inclinaison θ.

Celle-ci ne peut grandir, ou plutôt s'écarter de sa valeur normale $\frac{V^2}{gR}$ donnée par (9) sur une voie d'un rayon R de courbure assigné [1], que si sa dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, rendue, par une circonstance accidentelle quelconque, un peu sensible, et égale à une petite quantité donnée ε au moment où débute la perturbation qui en résulte, conserve une valeur appréciable pendant un certain temps. La circonstance en question peut être, par exemple, la rencontre d'un caillou sur la route, ou un coup de vent soufflant de côté, ou un mouvement spontané du bicycliste, etc. Le cavalier devra donc alors faire acquérir à la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ des valeurs de signe contraire au signe même de ε et capables de réduire assez rapidement jusqu'à zéro la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$. Il le pourra, puisqu'il dispose immédiatement, dans (11), de la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$, que j'appellerai ω, du guidon.

On voit qu'il devra donner à cette vitesse angulaire le signe de ε, c'est-à-dire *incliner le guidon vers le côté où il se sent jeté*, et aussi que les variations *naissantes* de α et θ viendront, les premières, concourir à son action, les secondes, la contrarier. L'effet utile des premières l'emportera sur l'effet nuisible des secondes, si la vitesse ω de rotation du guidon excède la fraction $\frac{ga}{V^2}$ de la vitesse initiale ε d'inclinaison, fraction d'autant plus faible que l'allure est plus rapide, et déjà petite (pour $a = 1^{m}$ par exemple) quand la vitesse V approche d'une dizaine de mètres par seconde.

En effet, dans le second membre de (11), le binome $\frac{V^2}{ga}\alpha - \theta$, nul à l'instant initial $t = 0$ de la perturbation où $\theta = \frac{V^2}{ga}\alpha$ et où la dérivée décroissante $\frac{d\theta}{dt}$ vaut ε, prendra le signe de $\frac{d\alpha}{dt}$ ou de ε, $\frac{V^2}{ga}\alpha$ y variant,

[1] Le rayon R de courbure de la trajectoire effective ne figurant plus explicitement dans les équations (10) ou (11) du mouvement, je désignerai désormais par R le rayon de courbure de la route (ou du sentier) que veut suivre le bicycliste.

par hypothèse, plus vite que ne fait le produit εt, tandis que θ, au contraire, varie moins que εt. Le second membre aura donc son dernier terme, en α et θ, de même signe que le premier, en $\frac{d\alpha}{dt}$.

7. Supposons, pour simplifier, ε assez petit, ou ω assez grand, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule avant que θ ait eu le temps de varier d'une manière notable. Alors le dernier terme binome de (11), d'abord nul, aura valu sensiblement

$$-\frac{g}{h'}\frac{V^2}{ga}\int_0^t \frac{d\alpha}{dt}\,dt = -\frac{V^2}{ah'}\int_0^t \omega\,dt.$$

Et l'équation (11), multipliée par dt, puis intégrée durant tout le petit temps τ nécessaire pour annuler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ d'inclinaison, qui était d'abord ε, donnera, en changeant les signes,

$$\varepsilon = \frac{b'V}{ah'}\int_0^\tau \omega\,dt + \frac{V^2}{ah'}\int_0^\tau dt\int_0^t \omega\,dt. \tag{12}$$

Désignons par ζ l'angle total $\int_0^\tau \omega\,dt$ dont le guidon aura tourné. La vitesse angulaire moyenne du guidon aura donc été $\frac{\zeta}{\tau}$, et l'on obtiendra une valeur approchée du dernier terme de (12) en y remplaçant ω par cette moyenne. La formule (12) devient alors la relation, entre ε, ζ et τ,

$$\varepsilon = \frac{V}{a}\left(\frac{b'}{h'} + \frac{V\tau}{2h'}\right)\zeta. \tag{13}$$

La rotation ζ du guidon est d'autant moindre, qu'elle a eu un temps τ plus long pour s'effectuer et produire son effet d'annulation sur la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de renversement. La valeur correspondant à l'hypothèse ($\tau = 0$) d'une action instantanée serait $\frac{ah'}{b'V}\varepsilon$; de sorte qu'on aura

$$\zeta < \frac{ah'}{b'V}\varepsilon. \tag{14}$$

Voyons maintenant ce qui arrivera une fois la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ de renversement annihilée.

Raisonnons toujours dans l'hypothèse qu'elle l'ait été assez vite pour qu'on puisse négliger la variation totale subie par θ durant le petit temps écoulé τ, variation dont la rapidité a décrû de ε à zéro, et qui est comparable, par conséquent, à $\frac{\varepsilon\tau}{2}$. Alors le cavalier, s'il veut éviter d'avoir bientôt à neutraliser une perturbation de sens contraire, pourra cesser d'influer sur θ, et annihiler cependant, à son tour, le petit écart total ζ éprouvé par l'angle α des traces des deux roues sur le sol, afin de retrouver le rayon primitif R de courbure de sa trajectoire, qui lui est imposé par la configuration du chemin à suivre. Il devra, pour cela, faire vérifier désormais par α l'équation (11) débarrassée de son premier terme, c'est-à-dire, s'il compte les temps à partir du moment où θ a eu sa dérivée annulée, adopter pour la partie variable $\Delta\alpha$, devenue ζ, de l'angle α, la formule

$$\Delta\alpha = \zeta e^{-\frac{Vt}{b'}}, \tag{15}$$

qui réduit très sensiblement l'équation (11) à $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$.

On voit qu'alors cette partie variable $\Delta\alpha$ de α sera devenue une fraction insensible de ζ et que, par suite, le rayon de courbure, $\frac{a}{\alpha}$, de la trajectoire retrouvera sa valeur normale R, dès que le parcours Vt aura atteint trois ou quatre longueurs b'.

8. Le changement d'orientation de la bicyclette sur la route, causé par la perturbation, aura été insignifiant pendant que s'effectuait la première rotation ζ du guidon par rapport au cadre, puisque l'instant τ de sa durée est supposé négligeable. Pendant que le guidon revient ensuite à sa première position relative, ce changement d'orientation sur le sol (ou par rapport à l'axe de la route) égale évidemment, par unité du chemin parcouru $\int ds$ ou $\int V\,dt$, le changement même $\frac{\Delta\alpha}{a}$ de la courbure; et il est en tout, très sensiblement,

$$\int_0^\infty \frac{\Delta\alpha}{a} V\,dt = \frac{V\zeta}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{Vt}{b'}}\,dt = \frac{b'\zeta}{a}, \tag{16}$$

quantité inférieure, d'après (14), à la limite très petite $\frac{h'}{V}\varepsilon$. Elle serait encore moindre, si le cavalier se penchait en avant pendant le premier temps, τ, de la manœuvre, pour y rendre b' le plus grand possible, et, d'après (13), réduire ζ; puis, s'il se redressait et se portait, au contraire, un peu en arrière durant la seconde phase, afin de diminuer alors b' et aussi, dans (16), le rapport $\frac{b'}{a}$ ([1]).

D'ailleurs, les déviations *absolues* qu'aura éprouvées en même temps la bicyclette sur le sol, par rapport à sa trajectoire directe ou non troublée, sont évidemment insignifiantes.

En résumé, les petits chocs transversaux tendant au renversement de la machine pourront, à une allure V suffisamment rapide, être corrigés sans dérangement appréciable, grâce à la manœuvre du guidon, qui finira par devenir instinctive chez le cavalier.

9. Des perturbations que l'on aurait négligé de neutraliser au début, et où l'écart $\theta - \frac{V^2}{gR}$ de l'inclinaison θ serait devenu sensible, donneraient lieu à des formules plus compliquées, parce que les quatre termes de l'équation (11) y interviendraient à la fois par des valeurs notablement variables. Je ne m'occuperai pas en détail de ce cas. J'observerai seulement que θ pourra y devenir telle petite fonction de t qu'on voudra, à partir des valeurs initiales, supposées données, tant de cette fonction que de sa dérivée première. Car il suffira que le cavalier choisisse pour α l'intégrale même, formée à partir de l'angle α existant au début, de l'équation différentielle du premier ordre en α que devient la relation (11), quand on y substitue à θ la fonction arbitraire voulue et à $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sa dérivée seconde.

La condition, à laquelle est astreinte l'inclinaison θ, de ne pas s'éloigner beaucoup de zéro, n'implique donc nullement, pour l'angle α du guidon, une série de valeurs étroitement définie, ou ayant quelque chose de singulier et de peu réalisable. En d'autres termes, une ma-

---

([1]) Toutefois, ces changements d'attitude devraient peut-être se faire trop vite pour ne pas mettre en défaut nos formules, dont la démonstration suppose que le cavalier se comporte comme un corps rigide fixé au cadre.

nœuvre du guidon suffisante pour éviter les chutes, sur une voie d'une certaine largeur, ne suppose pas, chez le cavalier, une très grande précision des mouvements ou une habileté exceptionnelle; et l'on s'explique aisément que presque tout le monde puisse, avec quelque persévérance, y réussir et s'y habituer, comme à la marche, à la course, au saut, au lancement d'une balle vers un but, etc., bref, aux exercices physiques qui ne sont pas du domaine spécial de l'acrobate.

Les valeurs de α devront, toutefois, ne pas excéder les angles possibles que comporte la bicyclette. Et la trajectoire devra aussi s'orienter vers la direction où l'on veut aller; sans quoi le cavalier n'aurait qu'à s'arrêter, pour repartir dans le sens voulu.

Il évitera, autant que possible, cet inconvénient, si, en faisant acquérir (après passage par zéro), un signe convenable à la dérivée première $\frac{d\theta}{dt}$, il amène assez vite l'inclinaison θ à sa valeur *de régime* $\frac{V^2}{gR}$, et si, au moment d'y réussir, il amortit durant un court instant τ la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ par une manœuvre rapide du guidon. Alors, il est vrai, l'angle α des traces des deux roues présentera généralement un certain écart $\Delta\alpha = \zeta$ d'avec sa valeur normale ou de régime $\frac{a}{R}$. Mais le cavalier pourra faire évanouir graduellement cet écart de la manière qui supprime son influence sur θ, c'est-à-dire qui annule, dans (11), la dérivée seconde $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Il tâchera donc de donner désormais à la partie variable $\Delta\alpha$ de α la valeur décroissante $\zeta e^{-\frac{Vt}{b}}$, qui l'annihile au bout d'un parcours insignifiant, comme on a vu. Après quoi, θ et α auront ainsi repris leurs valeurs normales.

10. J'ai supposé la perturbation de $\frac{d\theta}{dt}$ causée par un choc, c'est-à-dire par une action (étrangère ou intérieure) assez forte pour créer presque instantanément des vitesses. Si cette action, beaucoup moins vive, n'avait engendré que des accélérations modérées, et si d'ailleurs le cavalier, qui en est averti par les petites déformations et les réactions concomitantes produites dans son corps, s'était trouvé attentif à les neutraliser, l'action du guidon aurait pu, évidemment, être beaucoup plus douce et plus brève, de manière à altérer bien moins encore la trajectoire.

A quoi il faut ajouter que les réactions du sol ont été censées, pour plus de simplicité, appliquées exclusivement aux points les plus bas K et A des plans médians des deux roues. Or il y a, en réalité, deux petites régions de contact des roues avec le sol, régions comprenant, plus ou moins près de leurs centres, les points respectifs K et A, mais ne s'y réduisant pas. Et l'on sait que les réactions y sont plus énergiques du côté où va la roue, c'est-à-dire du côté où la région commune à la roue et au sol est en train de s'étendre, que du côté opposé où la roue et le sol s'éloignent. Elles prédominent donc en avant du centre de la région commune, ainsi que sur le côté (droit ou gauche) vers lequel est dirigée la vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$ du plan médian de la roue. Ces réactions équivalent par suite, pour chaque roue : 1° à des réactions fictives, égales et de mêmes sens, appliquées au point K ou A; 2° au couple composé de forces précisément égales et contraires à celles-là et des réactions effectives. Ce couple, qui constitue la résistance appelée d'une manière assez impropre *frottement de roulement,* agira quelque peu sur la roue, malgré son petit bras de levier, et, évidemment, en sens contraire de la vitesse angulaire d'inclinaison, surtout quand cette vitesse sera dans le sens même de l'inclinaison θ et que, par suite, le bras de levier du couple aura ses moins petites valeurs (K ou A étant, relativement au centre de la petite région de contact, à l'opposé du côté où se produiront les plus fortes réactions). Le couple tendra donc à annuler la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, ou à maintenir la bicyclette dans sa position d'équilibre relatif.

Au reste, comme l'a expliqué judicieusement M. Bourlet dans son *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes* (*équilibre et direction*) (Paris, Gauthier-Villars, p. 95 et 89), des dispositions, concernant la direction et la place de l'axe autour duquel tourne le plan de la roue directrice, sont prises, dans les machines actuelles : 1° pour que cette roue s'incline, par l'effet tant de son poids que de la pression du sol sur elle, du côté où la bicyclette viendrait à pencher, de manière à remédier automatiquement, en marche rectiligne, à cette inclinaison de la machine; et aussi, 2° pour que, une fois la situation verticale du cadre rétablie, le frottement du sol sur la roue directrice, en tirant vers l'arrière le bas de cette roue, la ramène dans le plan du cadre (¹).

(¹) *Remarques complémentaires; essai sur l'explication du virage.*

Mon but n'était pas, comme on voit, d'étudier ce frottement des roues, ni de déterminer les limites de l'inclinaison θ au delà desquelles il devient insuffisant pour empêcher la bicyclette de glisser sur le sol. Je renverrai le lecteur, pour cette question, ainsi que pour le travail et les résistances en jeu dans le mouvement, au *Traité* de M. Bourlet. L'étude des actions intérieures et des réactions du sol ou de l'atmosphère exigerait évidemment l'emploi d'équations du mouvement autres que l'unique relation des moments dont j'ai fait usage. Celle-ci n'a suffi, dans les limites de l'approximation obtenue, que grâce aux deux hypothèses : 1° d'un sol assez rugueux pour s'opposer au glissement des roues tout en permettant leur roulement; 2° d'un cavalier en état de produire à sa volonté les deux mouvements des pédales et du guidon, sans changer notablement ni de forme, ni de position par rapport au cadre de la bicyclette. Les mouvements étendus, plus ou moins vifs, qu'il peut s'imprimer pour modifier la configuration et les inerties actuelles du système, échapperaient donc à notre théorie, ou aux formules (9), (10), (11), qui la résument.

Je n'ai, d'ailleurs, fait intervenir pour le maintien de l'équilibre que la manœuvre du guidon, réduisant l'action des pieds du cavalier à entretenir la vitesse V. Il faudrait sans doute une fonction arbitraire de plus, c'est-à-dire aussi la libre disposition de variations successives à imprimer à la vitesse V, pour pouvoir en même temps modifier à volonté l'orientation de la trajectoire; et encore cela ne suffirait-il pas toujours, comme on verra, ci-après, par l'exemple de l'entrée dans un tournant, où le bicycliste devra directement faire naître, par de passagères mais sensibles déformations de son corps, l'inclinaison positive θ alors indispensable. En tout cas, un cavalier qui serait assez habile dans le jeu des pédales, combiné avec celui du frein, pour produire des changements convenables de vitesse d'un point à l'autre du trajet, tandis que ses mains donnent à l'angle α du guidon les valeurs $\frac{a}{R}$ produisant une suite de courbures voulues $\frac{1}{R}$, tirerait évidemment un grand parti de cette double manœuvre.

Supposé animé, par exemple, d'une certaine vitesse V_0 à son passage par un point où R aurait une valeur R_0 et où s'annuleraient à la fois l'inclinaison θ et la vitesse d'inclinaison $\frac{d\theta}{dt}$, il pourrait maintenir vertical le plan KGA de la bicyclette, et *suivre cependant une trajectoire assignée,* ou dont on donnerait, en fonction de l'arc s parcouru, la suite des courbures $\frac{1}{R}$: il est vrai que ce serait en enrayant très vite le mouvement, sauf toutefois dans le cas important d'une trajectoire à courbures successives évanouissantes, comme est celle qu'on suit à l'issue des tournants, où le chemin devient rectiligne. Il n'aurait, en effet, qu'à régler désormais le rapport des vitesses V aux rayons de courbure R par la formule

$$\text{(17)} \qquad \frac{V}{R} e^{\frac{s}{b'}} = \text{const.}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R_0} e^{-\frac{s}{b'}},$$

qui rend égaux les second et quatrième termes de l'équation (9). Celle-ci se trouve donc réduite à une équation linéaire de second ordre en θ; et son intégrale, vu les conditions initiales supposées, est bien $\theta = 0$.

La formule (17) pourrait évidemment régir la transition, même à vitesse constante, d'un chemin courbe à un chemin droit. Il suffirait d'y prendre

$$V = V_0 \qquad \text{et} \qquad R = R_0 e^{\frac{s}{b'}}.$$

Quant à l'entrée dans un tournant, la double manœuvre des pédales et du guidon ne paraît pas pouvoir y suffire : il y faut de plus un mouvement spontané et d'ensemble du bicycliste sur sa machine. Celui-ci devra s'y porter du côté de la concavité du tournant, pour produire les valeurs positives de $\frac{d\theta}{dt}$ et de θ qui motiveront une rotation du guidon vers le même côté et y dévieront, par suite, la trajectoire. En effet, si le cavalier restait sensiblement immobile sur la selle et que, par suite, *l'équation* (9) *s'appliquât*, le quotient $\frac{V}{R}$, d'abord nul, puis positif, rendrait le second terme de (9) positif lui-même. Mais alors, le quatrième terme $-\frac{V^2}{h'R}$ devenant négatif, tandis que le troisième, en θ, d'abord nul lui aussi, serait évidemment négligeable à côté du premier $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, celui-ci ne pourrait qu'être négatif. Donc les valeurs naissantes de $\frac{d\theta}{dt}$ et de θ seraient négatives; et le troisième terme de (9) viendrait bientôt joindre son influence à celles du terme qui le précède et de celui qui le suit, pour accentuer encore dans le même sens négatif, d'après (9), les valeurs du premier terme $\frac{d^2\theta}{dt^2}$. C'est dire que l'inclinaison θ s'exagérerait, jusqu'à rendre imminent le renversement de la bicyclette. Ainsi, un mouvement d'ensemble du cavalier est indispensable.

On sait d'ailleurs, depuis une remarque faite par M. Guyou, qu'un tel mouvement pourra amener, même à vitesse de progression V nulle, une inclinaison θ voulue. Car, dans un système déformable, sans vitesse angulaire initiale autour d'un axe fixe donné, le principe des aires ne s'oppose pas, comme il le ferait pour un corps rigide, à ce que des actions intérieures, en provoquant des déformations purement temporaires, produisent autour de l'axe un changement effectif ou persistant de l'orientation, dans l'espace, du système, une fois revenu à sa première configuration. C'est en cela même que consiste l'importante remarque de M. Guyou. Sans doute, ici, le retour du système à sa configuration première ne saurait être complet, vu l'existence de produits, brûlés justement par le travail de la déformation dans les nerfs et les muscles du bicycliste, et emportés ailleurs aussitôt après. Mais la faible masse de ces produits, malgré le rôle important de leur énergie dépensée, les rend insignifiants au point de vue des aires décrites, tout comme le sont déjà les échanges gazeux incessants entre l'organisme entier et l'atmosphère ambiante, échanges qui altèrent lentement le système dans son identité de substance.

Il suit de là que, pour l'explication des *virages*, ou changements de direction venant à la suite d'un trajet rectiligne, l'équation (9) ou (10) aurait besoin d'être complétée par un cinquième terme, nécessairement très complexe, formé en ajoutant aux coordonnées i, j, l, qui définissent la situation des éléments dm de la masse du système par rapport au plan médian KGA, des parties i', j', l', fonctions du temps t, et dont la troisième, l' ne serait plus pareille de part et d'autre du plan KGA. On voit que ce cinquième terme dépendrait, comme V et R ou α, d'une sorte de fonction arbitraire, exprimant les mouvements propres plus ou moins étendus du cavalier sur la bicyclette, et mise à sa disposition comme le sont déjà les deux dérivées premières de V et de α. Mais il est clair que cette troisième fonction arbitraire n'entrerait pas dans l'équation d'une manière aussi simple que le font les deux premières, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$, et que surtout elle ne représenterait pas une manœuvre aussi facile à préciser que celles des pédales ou du guidon. Pour mieux dire, les deux fonctions arbitraires $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ expriment les deux éléments que nous avons réussi à dégager, dans cette troisième fonction, qui comprend encore tout ce qui est resté indistinct et confus dans l'action ou les mouvements propres du cavalier. C'est quand cette action ou ces mouvements propres se réduisent strictement aux manœuvres des pédales et du guidon, que notre équation (9) ou (10) s'applique.

Un résumé du présent Mémoire a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CXXVII, p. 843 et 895 ; 28 novembre et 5 décembre 1898).